MIIA – Präsenzaufgaben Nr. 4
16.5 – 18.5.2007

1. Man führe direkt auf die Definitionen zurück: $a \in X$ ist genau dann Berührpunkt der Teilmenge Z in einem metrischen Raum X, wenn es eine Folge (a_k) , $a_k \in Z$, mit $a_k \to a$ gibt.

2. Man zeige: Eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge enthält, ist bereits konvergent.

3. Man beweise oder widerlege für eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum:

   - Wenn jede Teilfolge von (x_n) eine konvergente Teilfolge hat, dann ist (x_n) schon selbst konvergent.
   - Wenn jede Teilfolge von (x_n) konvergiert, so ist (x_n) konvergent.
   - Wenn (x_n) Cauchyfolge ist, so ist (x_n) auch beschränkt.
   - Wenn (x_n) eine beschränkte Cauchyfolge ist, so konvergiert (x_n) bereits.
   - Wenn es zu jedem $x \in X$ eine konvergente Teilfolge von (x_n) gibt mit Grenzwert x, so ist
     i) $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$,
     ii) $\partial(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = X$.

4. Man beweise oder widerlege:

   i) Wenn $B \subset X$ beschränkt ist, so ist $\overline{B}$ kompakt.

   ii) Wenn $B \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt ist, so ist $\overline{B}$ kompakt.

5. Man beweise oder widerlege:

   i) Für die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -t^2$ ist der Graph $\{(t, f(t)) : t \in [0,1]\}$ kompakt.

   ii) Ebenso ist $\{(t, \sin\frac{1}{t}) : t \in]0,1]\} \cup \{(0,0)\}$ kompakt.